11. *French K.* Expected stock returns and Volatility / K. French, W. Schwert, R. Stambaugh // Journal of Financial Economics. — 1987. — Vol.19. — P. 137—155.

12. *Nelson D.* Conditional heteroscedasticity in asset returns: A new approach / D. Nelson // Econometrica. — 1990. — Vol. 59. — P. 347—370.

13. *Schwarz G. E.* Estimating the dimension of a model / G. E. Schwarz // Annals of Statistics. — 1978. — Vol. 6 (2). — P. 461—464.

Стаття надійшла до редакції 24 квітня 2013 р.

УДК 519.8(075)

***Манжос Т. В.**, к.ф.-м.н.,*
доцент кафедри вищої математики,
***Луцишина Ж. В.**, доктор філософії в галузі економіки,*
старший викладач кафедри вищої математики,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ОПТИМІЗАЦІЯ УПРАВЛІННЯ ЗАПАСАМИ ПІДПРИЄМСТВА З УРАХУВАННЯМ РИЗИКУ

Вивчається питання про оптимальний розмір товарного чи виробничого запасу підприємства, за якого функція прибутку досягає максимуму за умови стохастичного попиту. Побудовано алгоритм знаходження такого оптимального розміру замовлення ресурсу у випадку врахування ризику, спричиненого варіацією майбутнього випадкового прибутку за рівномірно розподіленого попиту.

Исследуется задача определения оптимального размера товарного или производственного запаса предприятия, который максимизирует функцию прибыли, в условиях неопределенности. Найден алгоритм поиска такого оптимального размера заказа в случае, если риск, возникающий вследствие вариации прибыли, учитывается при построении целевой функции и спрос распределен равномерно.

We study the question of optimal lot size that can maximize a profit of the company, if demand is stochastic. The algorithm for search of optimal lot size under the mean-variance framework in a case of uniform distribution of demand was found.

Ключові слова: оптимальний розмір запасу, максимізація прибутку, одноперіодні моделі управління запасами, несхильність до ризику.

Ключевые слова: оптимальный размер запаса, максимизация прибыли, однопериодные модели управления запасами, несклонность к риску.

Key words: optimal lot size, maximization of the profit, single-period inventory system, risk-sensitive decisions.

Постановка проблеми. У наш час ринкової економіки запаси створюють виробничі підприємства різного профілю та потужності, підприємства оптової та роздрібної торгівлі, страхові компанії тощо. Яка ж основна функція запасів?

По-перше, причиною їх створення є те, що за рахунок збільшення розмірів партії можна зменшити витрати на закупівлю або виробництво одиниці розглядуваного ресурсу. Адже, наприклад, при закупівлі певного товару часто можна отримати оптову знижку. Також якщо розглядати виробництво деякого продукту, функція витрат, як правило, є монотонно зростаючою та опуклою, а це означає, що відношення $c(Q)/Q$, де Q — розмір партії продукту, $c(Q)$ — витрати на її виготовлення, є спадною функцією по змінній Q.

По-друге, потреби в ресурсах можуть постійно коливатись. Це стимулює компанії створювати резерви, щоб запобігти простою виробництва через можливу недостачу сировини, комплектуючих тощо. Якщо ж розглядати збутові підприємства, то постійне варіювання попиту на товар також обумовлює створення запасів, адже втрата клієнтів призводить до зменшення конкурентоздатності та прибутковості такого підприємства.

Перераховані вище причини спонукають різного роду підприємства створювати запаси. Основною проблемою ефективного управління ними є надлишок чи недостача запасу. Адже у першому випадку необхідні значні капіталовкладення, але дефіцит виникає рідко. І навпаки, при недостачі запасів капіталовкладення зменшуються, але це призводить до зростання ризику дефіциту. Для будь-якого з наведених випадків є характерними значні втрати. Таким чином рішення щодо розміру партії закуповуваного товару можуть базуватись на мінімізації функції загальних витрат, що включають в себе витрати, обумовлені надлишком запасу та дефіцитністю або ж на максимізації функції прибутку, отриманого підприємством при переробці чи використанні в технологічному процесі розглядуваного запасу. Але крім традиційних підходів існують й інші, більш складні критерії.

Основним підходом до побудови цільових функцій, відмінних від описаних вище, є функції, в яких певним чином береться до уваги «чутливість» до ризику при прийнятті рішень (англ. risk-sensitive decisions). Це так звані задачі несхильного до ризику або несхильного до втрат управлінця (англ. risk-aversion decision maker, loss-aversion decision maker). Саме урахування не тільки середніх витрат чи середнього прибутку, а й їх варіації, яка спричиняє ризик втрат при прийнятті управлінських рішень, і обумовлює актуальність та практичну цінність такого підходу до пошуку оптимальних стратегій функціонування системами запасів.

Аналіз основних джерел. Одноперіодна модель управління запасами, яка відома в літературі ще як «задача продавця газет», широко вивчалась і вивчається як у класичному вигляді, так і з урахуванням певних обмежень чи додаткових умов. Крім того вибір цільової функції для розв'язання цієї задачі суттєво впливає на оптимальне значення розміру замовлення.

Так званий підхід «середнє-варіація» (англ. Mean-variance approach) був уперше запропонований Марковіцем [1] з метою не лише максимізувати очікуваний прибуток, а й оцінити спричинений різними флуктуаціями ризик повернення активів. Цільова функція при такому підході була обрана таким чином, щоб урахувати власну оцінку важливості ризику у порівнянні з середнім прибутком менеджера, відповідального за прийняття рішень.

Розв'язання задачі управління запасами за такого підходу присвячена велика кількість робіт зарубіжних учених. Чен і Федергруен розглянули в своїй роботі [2] задачу існування та пошуку оптимальної стратегії за описаного вище підходу але без урахування витрат, спричинених дефіцитом. Зокрема було доведено, що в такому випадку функція варіації є монотонно зростаючою по змінній q — обсягу запасу. Звідси випливає, що зазначений підхід «середнє-варіація» є достатньо ефективним для пошуку оптимальної стратегії. Але у випадку врахування витрат дефіцитності функція варіації перестає бути монотонною і задача оптимізації ускладнюється. У роботах [3, 4] вивчається аналогічна задача без урахування витрат, пов'язаних з недостачею. Зокрема Екходт та ін. [4] показали, що врахування ризику в «задачі продавця газет» призводить до зменшення обсягу запасу на початку періоду.

Лау [5] розглянув описану задачу як з урахуванням витрат дефіцитності, так і без них. Було доведено, що оптимальний обсяг замовлення у «задачі продавця газет» нейтрального до ризику управлінця є верхньою межею оптимального обсягу замовлення за підходу, коли ризик враховується, за умови відсутності коштів, пов'язаних з дефіцитністю. Також було висунуто припущення, що з урахуванням витрат на недостачу результати будуть аналогічними.

У роботах [6, 7] проведено ґрунтовний аналіз одноперіодної задачі управління запасами за підходу «середнє-варіація». Зокрема авторами наведено основні підходи та результати, описані раніше, проведено їх аналіз та узагальнення.

У даній статті описується підхід «середнє-варіація» для пошуку оптимального обсягу замовлення у випадку одноперіодної задачі управління запасами підприємства, наведено основні результати, відомі на даний час, та знайдено алгоритм пошуку оптимального рішення за рівномірно розподіленого попиту на ресурс. Теоретичні викладки проілюстровано числовим прикладом.

Виклад основного матеріалу. Нехай C — закупівельна вартість або вартість виробництва одиниці товару, A — вартість одиниці товару, за якою продається в кінці періоду не використаний товар (англ. salvage value), S — питомі витрати, спричинені недостачею (без урахування втраченого прибутку), B — ціна збуту. За підходу, коли крім середнього прибутку при прийняті рішення враховується величина розсіяння цього прибутку, критерій оптимальності обсягу одноразового замовлення визначається так [7]:

$$\max_{q\geq 0}\{M(U(X,q))-\alpha D(U(X,q))\}, \tag{1}$$

де $U(X,q)=B\min\{q,X\}+A\max\{q-X,0\}-S\max\{X-q,0\}-Cq$ — прибуток, що залежить від випадкового попиту X та обсягу наявного запасу ресурсу q, α — параметр, що відображає власну точку зору відповідальної за прийняття рішень особи щодо важливості врахування ризику. Зазначимо, що при α = 0 отримаємо класичний випадок, коли максимізується лише очікуваний прибуток. Зі збільшенням параметра α збільшується готовність управлінця нехтувати середнім прибутком, щоб запобігти ризику, спричиненому його варіацією.

Знайдемо математичне сподівання та дисперсію прибутку, які присутні в цільовій функції, заданій виразом (1). Враховуючи формулу

$$\int_0^{й}(q-x)f(x)dx=\int_0^q F(x)dx,$$

де $f(x)$ і $F(x)$ відповідно диференціальна та інтегральна функції розподілу випадкового попиту X, та той факт, що $D[U(X,q)]=M[U^2(X,q)]-M^2[U(X,q)]$, одержимо:

$$M[U(X,q)]=-(B+S-A)\int_0^q F(x)dx+(B+S-C)q-S\cdot M(X); \tag{2}$$

$$\begin{aligned}D[U(X,q)]&=-(B+S-A)^2\left(\int_0^q F(x)dx\right)^2+\\&+2(B+S-A)(q(B-A)-S\cdot M(X))\int_0^q F(x)dx-\\&-2(B+S-A)(B-S-A)\int_0^q xF(x)dx+S^2D(X).\end{aligned} \tag{3}$$

Похідні першого та другого порядків функції $D[U(X,q)]$ дорівнюють відповідно:

$$\frac{dD[U(X,q)]}{dq}=2(B+S-A)\left[-(B+S-A)F(q)\int_0^q F(x)dx+SqF(q)+\right.$$
$$\left.+(B-A)\int_0^q F(x)dx-S\cdot M(X)F(q)\right];$$

$$\frac{d^2D[U(X,q)]}{dq^2}=2(B+S-A)\left[f(q)\left(\int_0^q F(x)dx-M(X))-(B-A)\int_0^q F(x)dx\right)+\right.$$
$$\left.+(B+S-A)F(q)(1-F(q))\right].$$

Існування оптимального розв'язку викладеної вище задачі максимізації випливає з наступної теореми.

Теорема 3.2. [7] Функція $D[U(X,q)]$ є обмеженою на $q\in[0,+\infty)$. Крім того,

$$\lim_{q\to 0}D[U(X,q)]=S^2D(X), \qquad \lim_{q\to\infty}D[U(X,q)]=(B-A)^2D(X).$$

Таким чином, опуклість функції $M(U(X,q))$ та обмеженість $D(U(X,q))$ гарантують існування оптимального розв'язку, який можна отримати в явній формі або наближено з допомогою різних алгоритмів залежно від закону розподілу попиту. Також для максимізації функції, заданої виразом (1), можна скористатись спеціальними пакетами комп'ютерних програм.

Розглянемо випадок, коли попит на ресурс розподілений рівномірно на відрізку $[q_1; q_2]$. З урахуванням того, що функція розподілу на $[q_1; q_2]$ $F(x) = \frac{x - q_1}{q_2 - q_1} = \frac{x - q_1}{\Delta}$, неважко отримати, скориставшись формулами (2) і (3), цільову функцію виду (1):

$$P(q) = M(U(X,q)) - \alpha D(U(X,q)) = aq^4 + bq^3 + cq^2 dq + e, \tag{4}$$

де коефіцієнти *a, b, c, d, e* дорівнюють відповідно

$$a = \alpha\left(\frac{B + S - A}{2\Delta}\right)^2;$$

$$b = \alpha\left(\frac{B + S - A}{\Delta}\right)\left(\frac{A - B - 2S}{3} - q_1\frac{B + S - A}{\Delta}\right);$$

$$c = \frac{B + S - A}{\Delta}\left(aq_1^2\frac{B + S - A}{\Delta} + aq_1(B + S - A) + \alpha S\frac{q_1 + q_2}{2} - 0{,}5\right);$$

$$d = B + S - C - \alpha S q_1(q_1 + q_2)\frac{B + S - A}{\Delta} + q_1\frac{B + S - A}{\Delta};$$

$$e = -\alpha S^2\frac{\Delta^2}{12} - S\frac{q_1 + q_2}{2}.$$

Таким чином, функція, яку слід максимізувати, многочлен четвертого степеня. Максимум цієї функції можна знайти чисельними методами або з допомогою пакетів комп'ютерних програм.

Проілюструємо застосування наведеного алгоритму пошуку оптимального значення q^*, за якого *P(q)* набуває максимуму, на прикладі.

Приклад. Попит на сировину підприємством розподілений рівномірно на проміжку [0;20], $C = 10$, $A = 3$, $B = 15$, $S = 7$. Оптимальний розв'язок задачі «продавця газет» за класичного підходу згідно формули $q^* = F^{-1}\left(\frac{B - C + S}{B - A + S}\right)$ [8]:

$$q^* = F^{-1}\left(\frac{12}{19}\right) = 12{,}63.$$

Скористаємось тепер іншим критерієм, що застосовується за підходу «середнє-варіація». Нехай параметр $\alpha = 0{,}3$, тоді за умови, що $0 \le q \le 20$, отримаємо

$$P(q) = M(U(X,q)) - 0{,}3 \cdot D(U(X,q)) = \frac{108{,}3}{1600}q^4 - \frac{74{,}1}{30}q^3 + \frac{779}{40}q^2 + 12q - 560.$$

Щоб максимізувати цільову функцію скористаємось пакетом *Wolfram Mathematica* [9], а саме функцією Maximize [*f,x*], одержимо такий оптимальний розв'язок: $q' = 7{,}56$. Отже, приймаючи рівень «важливості» ризику $\alpha = 0{,}3$, ми одержали значно менший оптимальний обсяг замовлення, ніж за класичного підходу, коли $\alpha = 0$.

Висновки з проведеного дослідження. У роботі проведено пошук алгоритму оптимального розміру замовлення за одноперіодної моделі, коли враховується ризик, спричинений варіацією можливого прибутку. Крім того, наведено формули, що дозволяють побудувати цільову функцію у випадку рівномірного закону розподілу. Наведений алгоритм проілюстровано числовим прикладом.

Напрямком подальшого дослідження може бути побудова цільових функцій та їх максимізація за інших законів розподілу попиту, а саме — нормального, логнормального, експоненційного. Крім того, в деяких випадках зручніше будувати функцію витрат та її мінімізувати. Цей підхід широко описаний у літературі (наприклад, див. [10]). Тому практичний інтерес представляє задача пошуку оптимального розміру замовлення за такого підходу, але якщо цільова функція буде побудована з урахуванням ризику.

Література

1. *Markowitz H.* Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments.[Text] / H. Markowitz — Yale University Press, New Haven, USA, 1959. — 375 p.

2. *Chen F.* Mean-variance analysis of basic inventory models.[Text] /F. Chen and A. Federgruen, Working Paper, Columbia Business School, New York, USA, 2000.

3. *Choi T.* Channel coordination in supply chains with agents having mean-variance objectives. [Text] / T. Choi, D. Li, H. Yan, and C. Chiu // Omega. — 2008. — V. 36, pp. 565—576.

4. *Eeckhoudt L.* The risk averse (and prudent) newsboy. [Text] / L. Eeckhoudt, C. Gollier, and H. Schlesinger // Management Science. — 1995. — V.4, pp. 786—794.

5. *Lau H.* The newsboy problem under alternative optimization objectives. [Text] / H. Lau // Journal of the Operational Research Society. — 1980. — V. 31, pp. 525—535.

6. *Wang C.* The loss-averse newsvendor problem. [Text] / C. Wang, S. Webster // Omega. — 2009. — V. 93, pp. 105.

7. *Wu J.* A Note on Mean-variance Analysis of the Newsvendor Model. [Online resource] / J. Wu, J. Li, S. Wang and T.C.E Cheng // http://ebookbrowse.com/a-note-on-mean-variance-analysis-of-the-newsvendor-model-final-pdf-d92441516

8. *Gallego G.* The distribution free newsboy problem: review and extensions. [Text] / G. Gallego, I. Moon // Journal of Operational Research Society. — 1993. — V. 44. — pp. 825—834.

9. http://www.wolfram.com/mathematica/ [Електронний ресурс].

10. *Taha H. A.* Operations Research — An Introduction (7th ed). [Text] / H.A. Taha. — Prentice Hall, Inc., New Jersey, 2003.

Стаття надійшла до редакції 15 травня 2013 р.

УДК 519.8

Блудова Т. В., *д.е.н.,*
професор кафедри вищої математики,
Мельник О. О.*, к.ф.-м.н.,*
старший викладач кафедри вищої математики,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»

ЕКОНОМІКО-МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПРИБУТКУ ВИРОБНИЦТВА В КОМПЛЕКСНОЗНАЧНІЙ ЕКОНОМІЦІ

У статті розглянуто апарат виробничих функцій, які використовуються в математичній економіці та економетриці, що дає можливість розглянути умови досягнення оптимального прибутку виробництва із застосуванням комплекснозначних функцій.

В статье рассматривается аппарат производственных функций, которые используются в математической экономике и эконометрии, что предоставляет возможность рассматривать условия достижения оптимальной прибыли производства с использованием комплекснозначних функций.

The apparatus of the production functions, which are used in the mathematical economy and econometric, that gives the possibility to consider the condition for achievement of optimal production income with application of the complex variable function is consider in the paper.